Chapitre 1: La croissance et le modèle de Solow

Macroéconomie L1

Gilles de Truchis

Version préliminaire - Semestre 2 - Année 2014-2015

Plan du chapitre

Introduction

Le modèle de Solow
- Solow simplifié
- Solow et la règle d'or du capital
- Solow et la croissance démographique
- Solow et le progrès technique

Croissance endogène
- Le modèle AK

Objectifs

Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur l'étude des déterminants de la croissance à long terme et en particulier du rôle de l'accumulation du capital et du progrès technique.

Objectif : comprendre pour certains pays sont riches et d'autres sont pauvres et comment des pays peuvent effectuer des rattrapages (*processus de convergence*)

Pour répondre à ces questions, nous allons utiliser le modèle de Solow développé dans les années 1950.

Sources de la croissance

D'où vient la croissance économique ? Pourquoi la production par travailleur augmente au cours du temps ?

2 explications possibles :

1. Une hausse de la production par travailleur peut venir d'une hausse du capital par travailleur. Mais l'accumulation du capital en elle-même ne permet pas une croissance durable en raison des rendements décroissants du capital.
2. La croissance peut venir d'une amélioration de la technologie de production. Le progrès technique entraine une plus grande production par travailleur à capital donné

Fonction de production

Le point de départ de toute théorie de la croissance est la **fonction de production** càd la relation entre le produit (*output*) et les facteurs de production (*inputs*).

Supposons que la fonction de production deux facteurs de production, le capital et le travail :

$$Y = F(K, L)$$

La fonction F nous dit quelle est la production pour un niveau de capital K et un niveau de travail L donné.

Fonction de production

Cette fonction de production est une simplification

- pas de distinction entre les différents types de capitaux (ordinateurs, machines, chaises...)
- ni entre les différents types de travailleurs (qualifiés ou non-qualifiés)

Exemple de fonction de production (Cobb-Douglas) :

$$F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

Rendements d'échelles

Quelles restrictions doit-on imposer ?

Importance des rendements d'échelles : que se passe-t-il si l'ensemble des facteurs de production est multiplié par 2 ?

On peut supposer que la production Y sera elle aussi multipliée par 2. On parle alors **rendements d'échelle constants**.

Si l'on formalise cela donne :

$$F(K, L) = Y \Longrightarrow F(\lambda K, \lambda L) = \lambda Y$$

Rendements d'échelles

L'hypothèse des rendements d'échelle constants est souvent considérée comme réaliste et acceptable.

Cependant, on peut aussi trouver des cas de rendements :

- Décroissants : exemple de la mine où il faut aller chercher le minerai de plus en plus en profondeur
- Croissants : produits nécessitant des coûts fixes importants - de recherche, de gestion... - qu'il faut ensuite amortir

Rendements marginaux des facteurs

Que se passe-t-il quand on augmente un seul facteur ?

La production va aussi augmenter mais probablement moins vite. Surtout, une même quantité de capital ou de travail supplémentaire va entrainer de moins en moins d'augmentation de la production.

Exercice : pour la fonction Cobb-Douglas $F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$, montrer que le rendement marginal du K est décroissant

Rendements marginaux des facteurs

Réponse :
Pour

$$Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

$$PmK = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \alpha(\alpha-1) K^{\alpha-2} L^{1-\alpha}$$

Comme $\alpha < 1$ on a $\alpha - 1 < 0$ et donc

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0$$

Conditions d'Inada

Aux hypothèses de **rendements d'échelle constants** et de **rendements marginaux décroissant** s'ajoute de 3 hypothèses supplémentaires dont le but est de garantir l'existence d'un sentier de croissance stable.

$$Y = F(0,0) = 0$$

$$\lim_{K \to 0} F'_K = \lim_{L \to 0} F'_L = +\infty$$

$$\lim_{K \to \infty} F'_K = \lim_{L \to \infty} F'_L = 0$$

L'ensemble de ces conditions forme les **conditions d'Inada**

Comptabilisation de la croissance

$$g = \frac{Y_t - Y_t - 1}{Y_t - 1} = \frac{\Delta Y}{Y} \simeq log(Y_t) - log(Y_t - 1)$$

On peut donc décomposer la croissance g du produit selon la croissance des inputs :

$$g = \frac{\Delta Y}{Y} = \alpha \frac{\Delta K}{K} + (1 - \alpha) \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta A}{A}$$

Pour que $\frac{\Delta L}{L} > 0$, la population N, doit croître à un taux g_N. Si les agents épargnent, le capital va également croître au taux de croissance de la population g_N.

On a donc

$$g = \frac{\Delta Y}{Y} = \alpha g_N + (1 - \alpha) g_N + g_A = g_N + g_A$$

où g_A représente la croissance du progrès technique.

Croissance et accumulation

Grande force du modèle de Solow (1956), fondateur de la théorie néoclassique de la croissance, est qu'il reproduit la plupart des faits stylisés de Kaldor

1. le revenu par tête croît de façon continue
2. le capital par tête est croissant au cours du temps
3. le taux de rendement du capital est constant sur longue période
4. le rapport capital/produit est constant sur longue période
5. les parts du capital et du travail dans le revenu national sont constantes
6. les taux de croissance de la productivité du travail diffèrent entre les pays

Croissance et accumulation

Table: Caractéristiques du sentier de croissance chez Solow

	Taux de croissance
Production	$g_N + g_A$
Capital	$g_N + g_A$
Travail	g_N
Production par travailleur	g_A
Capital par travailleur	g_A

Avec g_N taux de croissance démographique, et g_A taux de croissance du progrès technique

Plan du chapitre

Introduction

Le modèle de Solow
- Solow simplifié
- Solow et la règle d'or du capital
- Solow et la croissance démographique
- Solow et le progrès technique

Croissance endogène
- Le modèle AK

Accumulation du capital sans progrès technique

Pour isoler l'effet de l'accumulation, on commence par une version simple du modèle de Solow :

1. Il n'y a pas de croissance de la population : $g_N = 0$
2. Il n'y a pas de progrès technologique. On a donc $Y_t = F(K_t, L_t) = K^\alpha L^{1-\alpha}$.
3. Le comportement d'épargne est constant $\Rightarrow$ la propension marginal à épargner s

Accumulation du capital sans progrès technique

Nous allons procéder en 2 étapes, en étudiant :

1. La relation entre production et investissement
2. La relation entre investissement et accumulation du capital

Production et investissement

Hyp : l'économie est fermée et pas de gouvernement

Donc on a : $Y = C + I$. Or on sait que $S = Y - C$ donc $S = I$

On supposera ici que l'épargne privée est proportionnelle au revenu d'où : $S = sY$ avec $s \in [0, 1]$

Implication :

- s reste constant lorsqu'un pays s'enrichit $\Longrightarrow$ Un pays riche n'aura pas systématiquement un taux d'épargne plus élevé qu'un pays pauvre

Au final, on a :

- $I = sY$, i.e. l'investissement est proportionnel à la production
- La proportion du revenu qui n'est pas épargnée est consommée : $C = (1 - s)Y$

L'intensité capitalistique

En rapportant la production au nombre de travailleurs, on obtient :

$$\frac{Y_t}{L_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t}, \frac{L_t}{L_t}\right) = F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right)$$

On notera k_t l'intensité capitalistique avec

$$k_t = \frac{K_t}{L_t}$$

Remarque

D'un manière générale, toutes les variables en minuscule seront des variables rapportées à L_t.

On a donc

$$y_t = f(k_t)$$

Avec une fonction de Cobb-Douglas, on obtient :

$$y_t = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha} = k_t^{\alpha}$$

Investissement et accumulation du capital

Introduisons à présent le taux de dépréciation du capital : δ

Remarque

Chaque année, une fraction du k de l'économie devient obsolète et doit être remplacé. L'investissement vient donc en premier lieu remplacer les vielles machines puis augmenter le niveau de k dans l'économie. δk_t correspond donc à l'amortissement du capital

On a donc

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$$

On obtient donc

$$k_{t+1} - k_t = sy_t - \delta k_t$$

car $i_t = sy_t = sf(k_t)$

On notera donc également :

$$k_{t+1} - k_t = \Delta k_t = sf(k_t) - \delta k_t$$

Dynamique de l'économie

On peut évaluer l'état de l'économie à chaque période, à partir de :

$$k_{t+1} - k_t = sf(k_t) - \delta k_t$$

$\Longrightarrow$ **Equation fondementale du modèle de Solow**

Question :

1. Existe-t-il un équilibre où cette équation dynamique est stable telle que $k^\star$ stationnaire ?

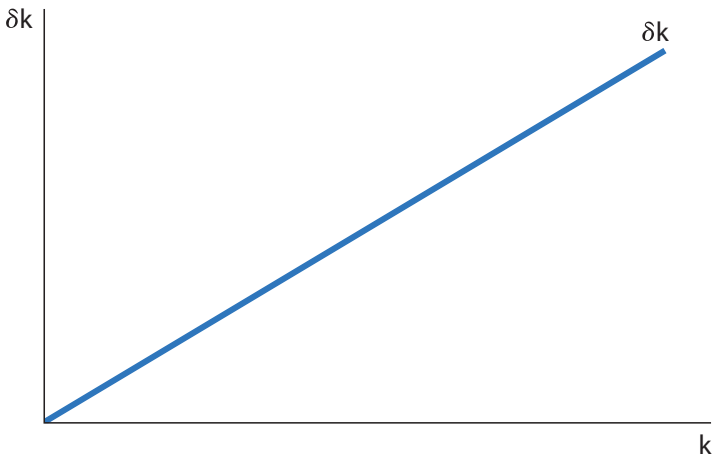
Remarque

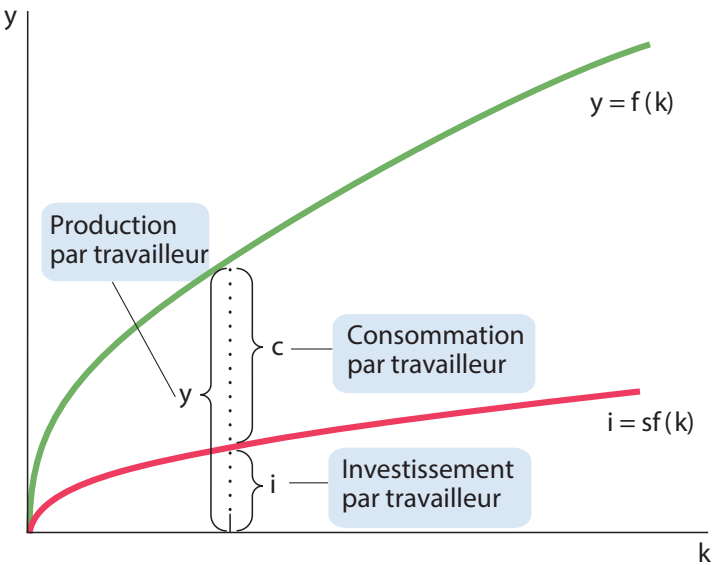
Définition : *l'état stationnaire est un état de l'économie où le capital croît au même rythme que toutes les autres variables, càd à un taux 0.*

Remarque

Au bout d'un certain nombre de période, le capital accumulé devient si important que l'investissement est tout juste suffisant pour compenser la partie du capital qu'il faut remplacer. En ce point, l'investissement ne permet plus d'accumuler davantage de capital est donc $k_{t+1} - k_t = 0$

Etat stationnaire

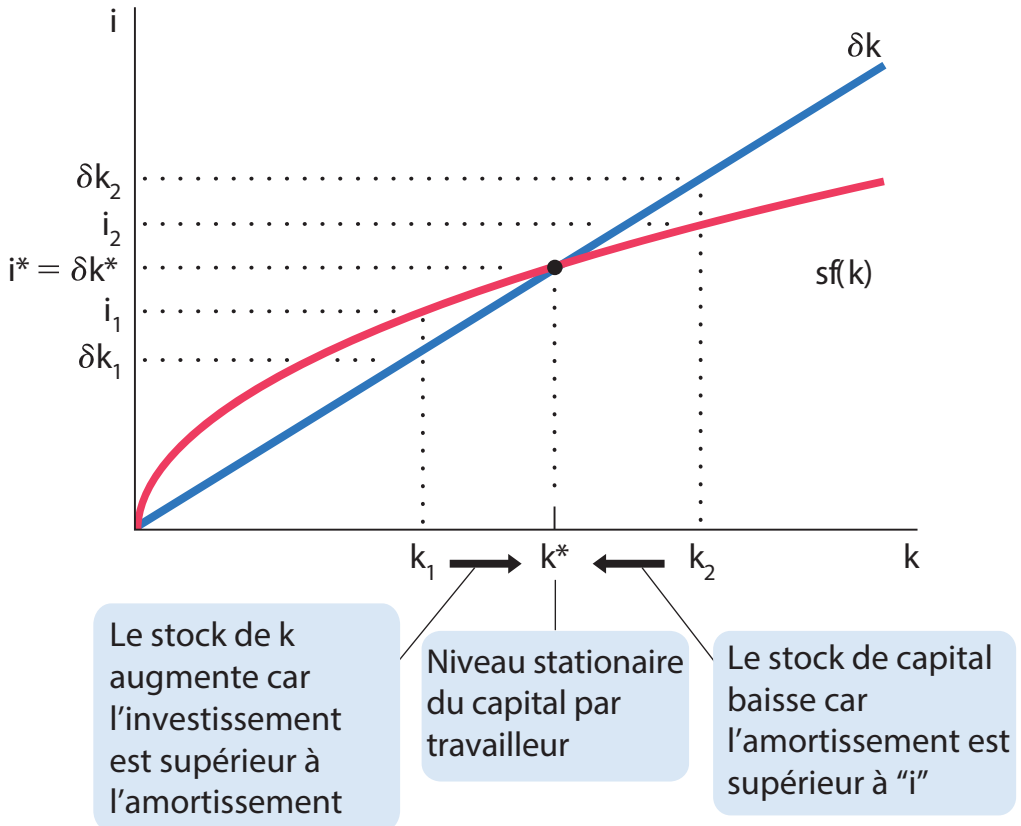




L'état stationnaire est atteint lorsque $\Delta k_t = sf(k_t) - \delta k_t = 0$.

En d'autres termes, l'état stationnaire est atteint lorsque l'investissement compense parfaitement l'amortissement et donc lorsque la courbe δk coupe la courbe $i = sf(k)$

Etat stationnaire



Remarque

Ici, l'état stationnaire existe et il est unique. L'économie tend vers l'état stationnaire d'où qu'elle parte. Un fois à l'état stationnaire elle ne bouge plus : **état de long terme**

Dynamique de l'économie

L'équilibre stationnaire est donc déterminé par l'équation fondamentale dans laquelle

$$k_{t+1} - k_t = sf(k_t) - \delta k_t = 0$$

On a donc :

$$\frac{f(k^\star)}{k^\star} = \frac{\delta}{s}$$

Exercice : pour la fonction Cobb-Douglas $F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$, trouver $k^\star$ avec $\alpha = 1/2$

Dynamique de l'économie

Réponse : On a donc

$$y_t = \frac{K_t}{L_t}^{1/2} = f(k_t) = k_t^{1/2} = \sqrt{k_t}$$

La fonction d'accumulation du capital est alors donnée par

$$k_{t+1} - k_t = sf(k_t) - \delta k_t = sk_t^{1/2} - \delta k_t$$

A l'état stationnaire, $k_{t+1} - k_t = \Delta k_t = 0$ ce qui implique

$$sk_t^{1/2} = \delta k_t$$

En reformulant on obtient

$$\frac{k_t^{1/2}}{k_t} = k_t^{-1/2} = \frac{\delta}{s}$$

On obtient alors

$$k^\star = \left(\frac{\delta}{s}\right)^{\frac{1}{-0.5}} = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{0.5}} = \left(\frac{s}{\delta}\right)^2$$

Etat stationnaire

A l'état stationnaire, l'économie a convergé au point où :

$$k_{t+1} - k_t = \Delta k_t = 0$$

En ce point, le taux de croissance du capital par tête est nul :

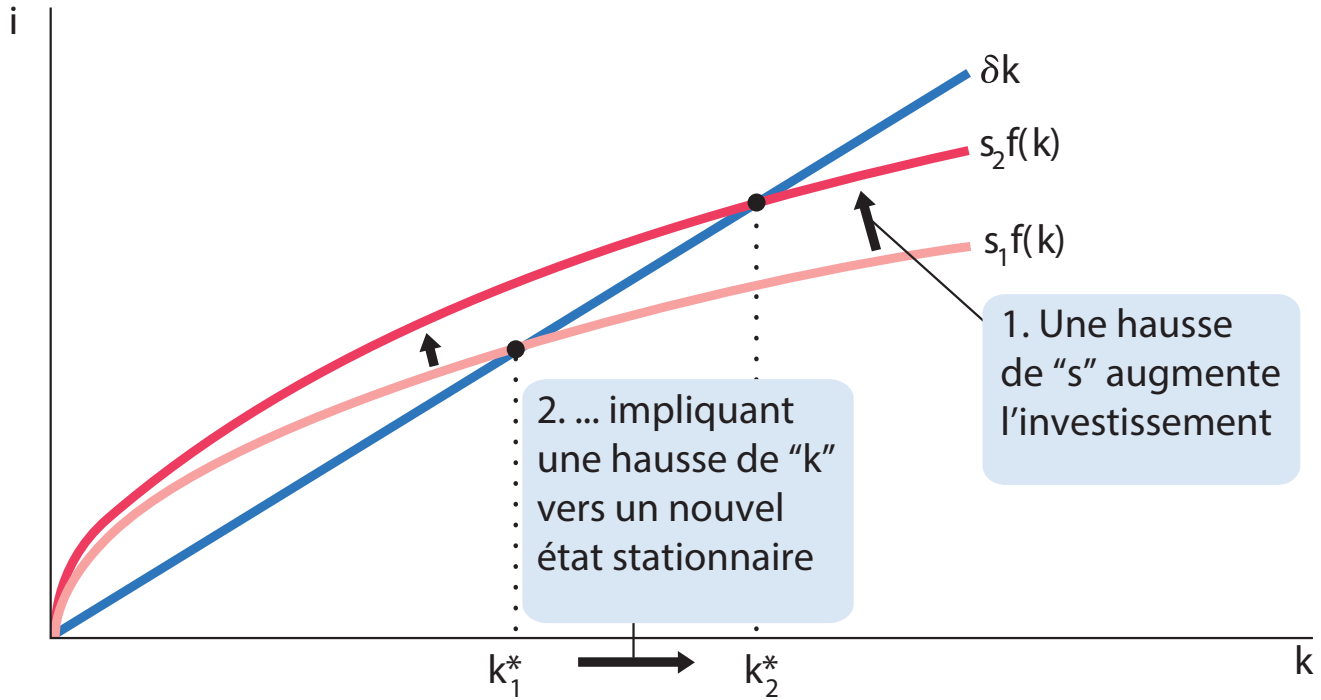
$$\frac{\Delta k}{k} = 0$$

Au cours de la dynamique, pendant la phase de convergence vers l'état stationnaire, le taux de croissance du stock de capital par tête va dépendre de l'état initial de l'économie.

Pour l'obtenir, on part de $k_{t+1} - k_t = sf(k_t) - \delta k_t$ et on divise par k_t :

$$\frac{\Delta k}{k} = s\frac{f(k)}{k} - \delta$$

Le rôle de l'épargne



Remarque

A l'ancien état stationnaire, l'investissement est désormais supérieur à l'amortissement. Le stock de capital par travailleur va donc augmenter pour atteindre le nouvel état stationnaire.

Exemple d'état stationnaire

On suppose que le taux d'épargne s $= 0.3$, $\alpha = 0{,}5$ et $\delta = 0{,}1$, on a donc :

$$k_{t+1} = k_t + 0,3k_t^{0.5} - 0,1k_t$$

Si l'on suppose $k_1 = 4$, on obtient alors :

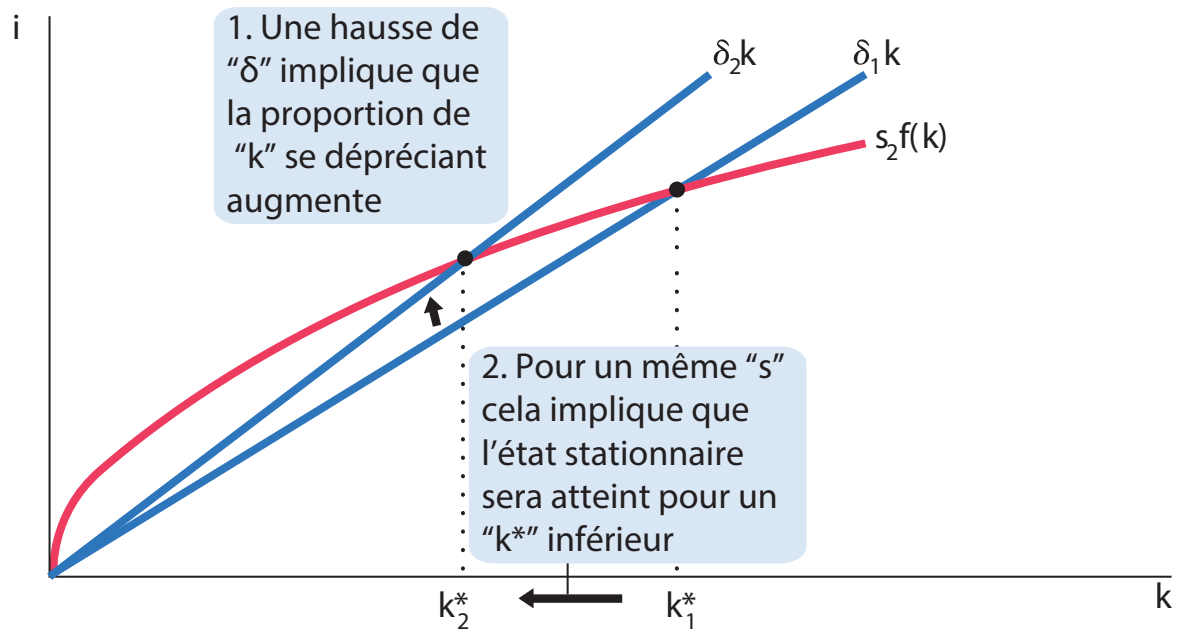
Exemple d'état stationnaire

Année	k	y	c	i	δ k	Δ k
1	4	2	1.4	0.6	0.4	0.2
2	4.2	2.049	1.435	0.615	0.420	0.195
3	4.395	2.096	1.467	0.629	0.440	0.189
4	4.584	2.141	1.499	0.642	0.458	0.184
5	4.768	2.184	1.529	0.655	0.477	0.178
10	5.602	2.367	1.657	0.710	0.560	0.150
100	8.962	2.994	2.096	0.898	0.896	0.020
Etat stationnaire	9	3	2.1	0.9	0.9	0

La règle d'or

Remarque

A cause du rôle de l'épargne dans le modèle de Solow, on pourrait croire qu'augmenter s à un taux proche de 100% est bénéfique. Mais cela serait au détriment de la consommation, ce qui n'est pas forcément souhaitable.



Remarque

s joue un rôle très important car les décideurs publiques peuvent influencer le comportement d'épargne des ménages. C'est plus délicat pour le taux de dépréciation du capital δ.

La règle d'or

Remarque

On peut donc se poser la question du niveau d'épargne qui à l'état stationnaire permet de maximiser la consommation

Le niveau de capital à l'état stationnaire permettant de maximiser c est appelé $k^{\star}_{or}$

Il est dicté par **la règle d'or d'accumulation du capital**

$\Rightarrow$ Pour comprendre comment fonction la **la règle d'or**, commençons par définir la consommation à l'état stationnaire...

La règle d'or

On sait que $y = c + i$ et on en déduit

$$c = y - i$$

La consommation à l'état stationnaire est donc aisément obtenu en remplaçant y et i par $y^\star = f(k^\star)$ et $i^\star = sf(k^\star) = \delta k^\star$:

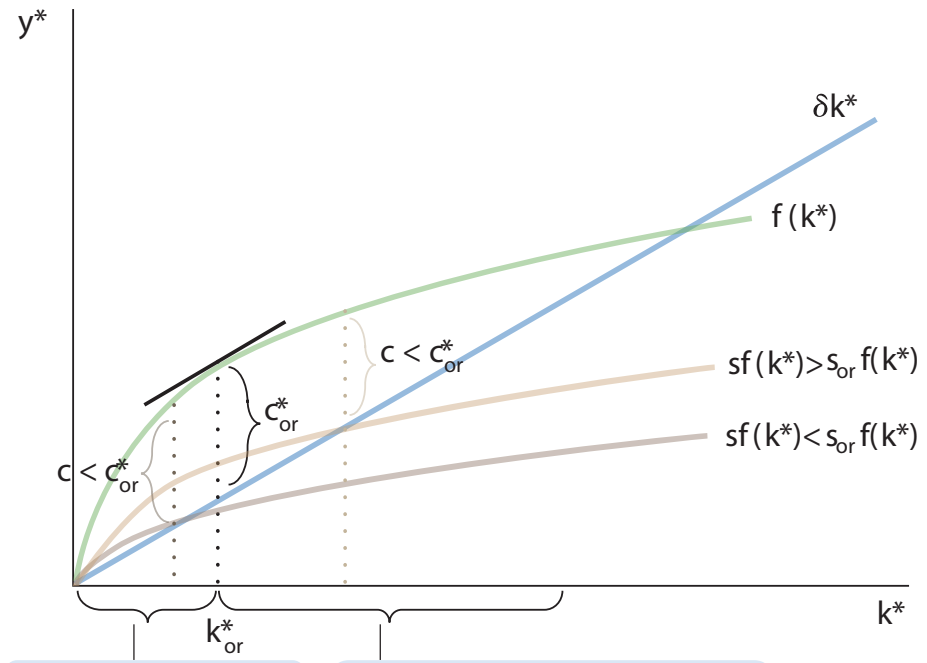
$$c^\star = f(k^\star) - \delta k^\star$$

On voit alors que pour un niveau d'épargne donné, la consommation à l'état stationnaire correspond à l'écart entre les courbes de y et de δk

La règle d'or

Remarque

L'écart est maximale lorsque les tangentes sont parallèles et donc de pentes identiques



En dessous de l'état stationnaire dicté par la règle d'or une hausse de k* implique un hausse de "c"

Au delà de l'état stationnaire dicté par la règle d'or, une hausse de k* induisent une baisse de la consommation

La règle d'or

Comme $i^\star = \delta k^\star$ est une droite, sa dérivée est une constante, δ.

Il suffit alors de trouver le stock de capital à l'état stationnaire pour lequel la pente de $y^\star = f(k^\star)$ est égale à δ.

On se souvient alors que la pente de $f(k^\star)$ est représentée par la $PmK = f(k^\star)'$

On en déduit que la règle d'or est décrite par la relation suivante :

$$f(k^\star_{or})' - \delta = PmK_{or} - \delta = 0$$

La règle d'or

On aurait pu également retrouver la règle d'or en maximisant directement la fonction de consommation par rapport à $k^\star$

Pour maximiser $c^\star = f(k^\star) - \delta k^\star$, on doit annuler sa dérivée première :

$$\frac{\partial c^\star}{\partial k^\star} = 0$$

On obtient alors

$$\frac{\partial c^\star}{\partial k^\star} = f(k^\star)' - \delta = PmK_{or} - \delta = 0$$

La règle d'or

Supposons à présent un décideur publique cherchant à maximiser la consommation.

Supposons également que ce dernier puisse agir directement sur le taux d'épargne.

Il doit trouver le taux d'épargne s_{or} qui va permettre d'atteindre $k^{\star}_{or}$ et donc $c^{\star}_{or}$

En repartant de l'exemple numérique précédent, on a

$$\frac{\sqrt{k}}{k^{\star}} = \frac{0.1}{s} \Rightarrow \frac{k^{\star}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{0.1}s \Rightarrow k^{\star} = \left(\frac{1}{0.1}s\right)^2 = 100s^2$$

Exercice : Trouver s_{or}

Règle d'or

Réponse : Numériquement

s	$k^\star$	$y^\star$	$\delta k^\star$	$c^\star$	PMK	$PMK - \delta$
0	0	0	0	0	∞	∞
0.1	1	1	0.1	0.9	0.5	0.4
0.2	4	2	0.4	1.6	0.25	0.15
0.3	9	3	0.9	2.1	0.167	0.067
0.4	16	4	1.6	2.4	0.125	0.025
0.5	25	5	2.5	**2.5**	0.1	0
0.6	36	6	3.6	2.4	0.083	-0.017
0.7	49	7	4.9	2.1	0.071	-0.029
0.8	64	8	6.4	1.6	0.063	-0.038
0.9	81	9	8.1	0.9	0.056	-0.044
1	100	10	10	0	0.05	-0.05

La règle d'or

Réponse : Analytiquement

A la règle d'or, les pentes des tangentes aux fonctions de production et de dépréciation du capital sont identiques :

$$PmK_{or} - \delta = 0$$

Cela implique que $k^{\star}_{or}$ est donné lorsque

$$f(k^{\star}_{or})' - \delta = 0$$

Or on sait que $k^{\star}_{or} = 100 s^2_{or}$ et que

$$PmK_{or} = \frac{1}{2\sqrt{k^{\star}_{or}}} = \frac{1}{2\sqrt{100 s^2_{or}}} = \frac{1}{2 \times 100 \times s_{or}}$$

On en déduit

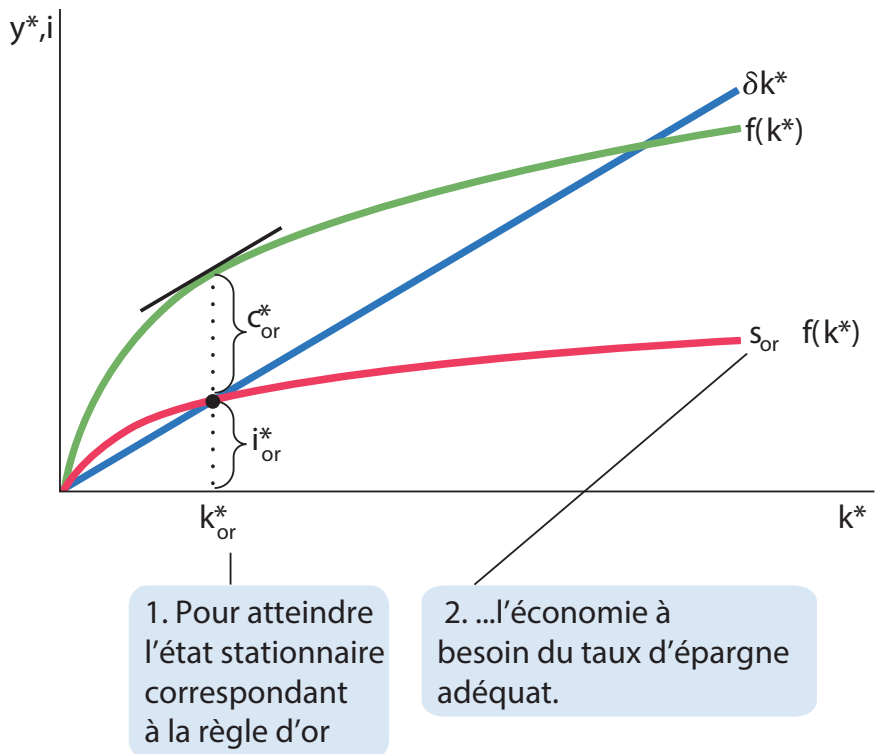
$$\frac{1}{20 \times s_{or}} - \delta = 0 \Rightarrow \frac{1}{20 \times s_{or}} = \delta \Rightarrow \frac{1}{s_{or}} = 20\delta \Rightarrow s_{or} = \frac{1}{20\delta} = \frac{1}{2}$$

car $\delta = 0.1$

La règle d'or

Remarque

Il existe un seul taux d'épargne qui permet d'obtenir le stock de capital $k^{\star}_{or}$



Si s varie, le nouvel état stationnaire correspondra nécessairement à un niveau de consommation inférieur

La croissance de long terme

Remarque

La version simplifiée du modèle de Solow de la section précédente permet d'expliquer la croissance pendant la phase d'accumulation uniquement

Comment expliquer la croissance durable ?

- Commençons par introduire la **croissance démographique** $g_N = n$.

Si la population s'accroît, le stock de capital par travailleur diminue mécaniquement.

L'investissement va donc devoir compenser la dépréciation du capital + l'effet de n pour s'assurer que la dotation en capital des nouveaux travailleurs soit la même que les anciens :

$$k_{t+1} - k_t = i - (\delta + n)k_t$$

On a donc

$$k_{t+1} - k_t = sf(k_t) - (\delta + n)k_t$$

Dynamique de l'économie

L'équilibre stationnaire est à présent déterminé par l'équation fondamentale dans laquelle

$$k_{t+1} - k_t = 0$$

On a donc :

$$f(k^\star) = \frac{(\delta + n)}{s} k^\star$$

Exercice : pour $F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$, trouver $k^\star$ avec α **inconnu**

Dynamique de l'économie

Réponse : On a donc

$$y_t = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha} = k_t^{\alpha}$$

La fonction d'accumulation du capital est alors donnée par

$$k_{t+1} - k_t = sk_t^{\alpha} - (\delta + n)k_t$$

A l'état stationnaire, $k_{t+1} - k_t = \Delta k_t = 0$ ce qui implique

$$sk_t^{\alpha} = (\delta + n)k_t$$

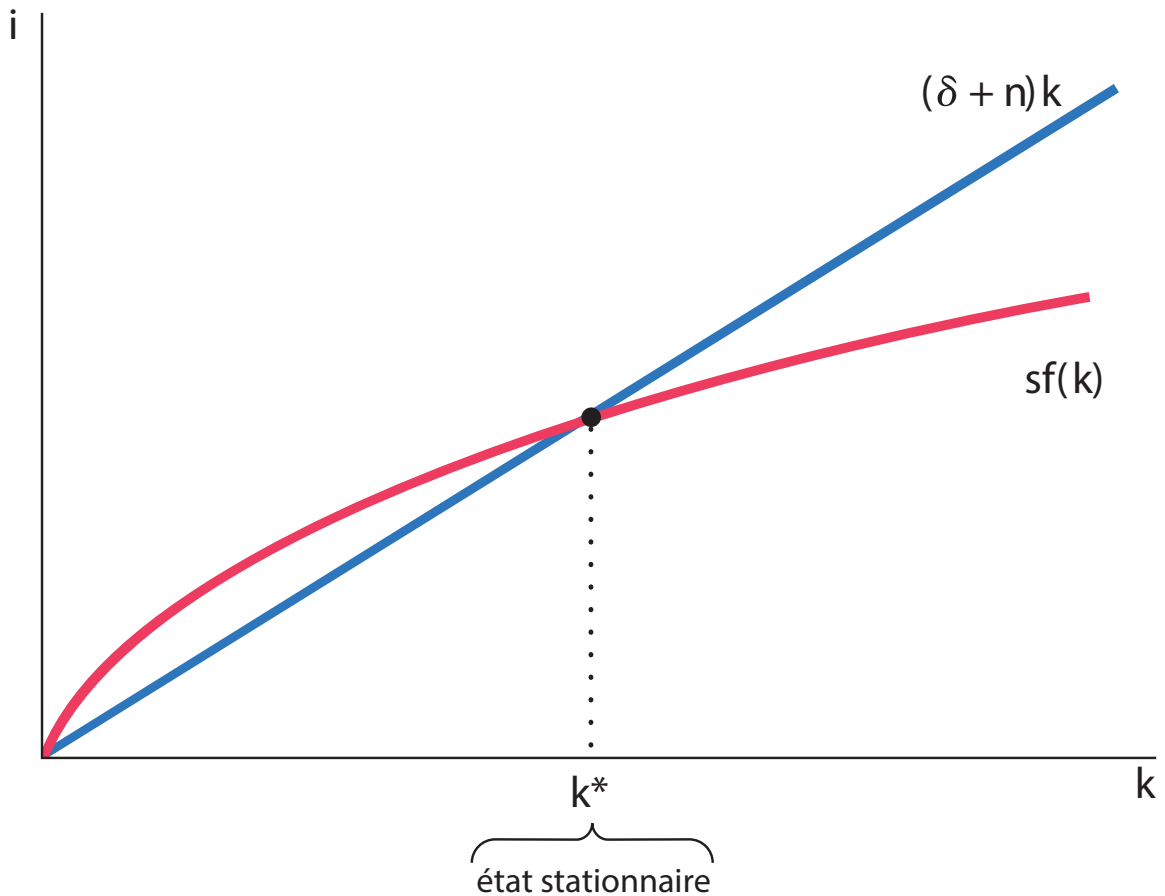
En reformulant on obtient

$$\frac{k_t^{\alpha}}{k_t} = k_t^{\alpha-1} = \frac{(\delta + n)}{s}$$

On obtient alors

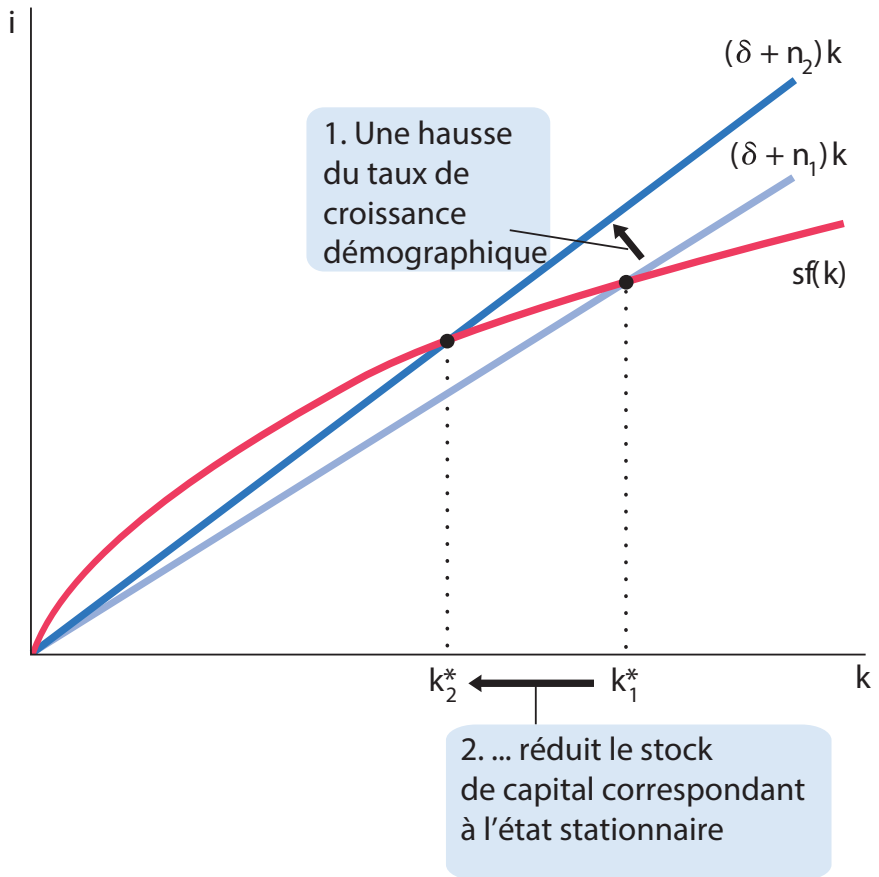
$$k^{\star} = \left(\frac{\delta + n}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Impact de n sur la croissance

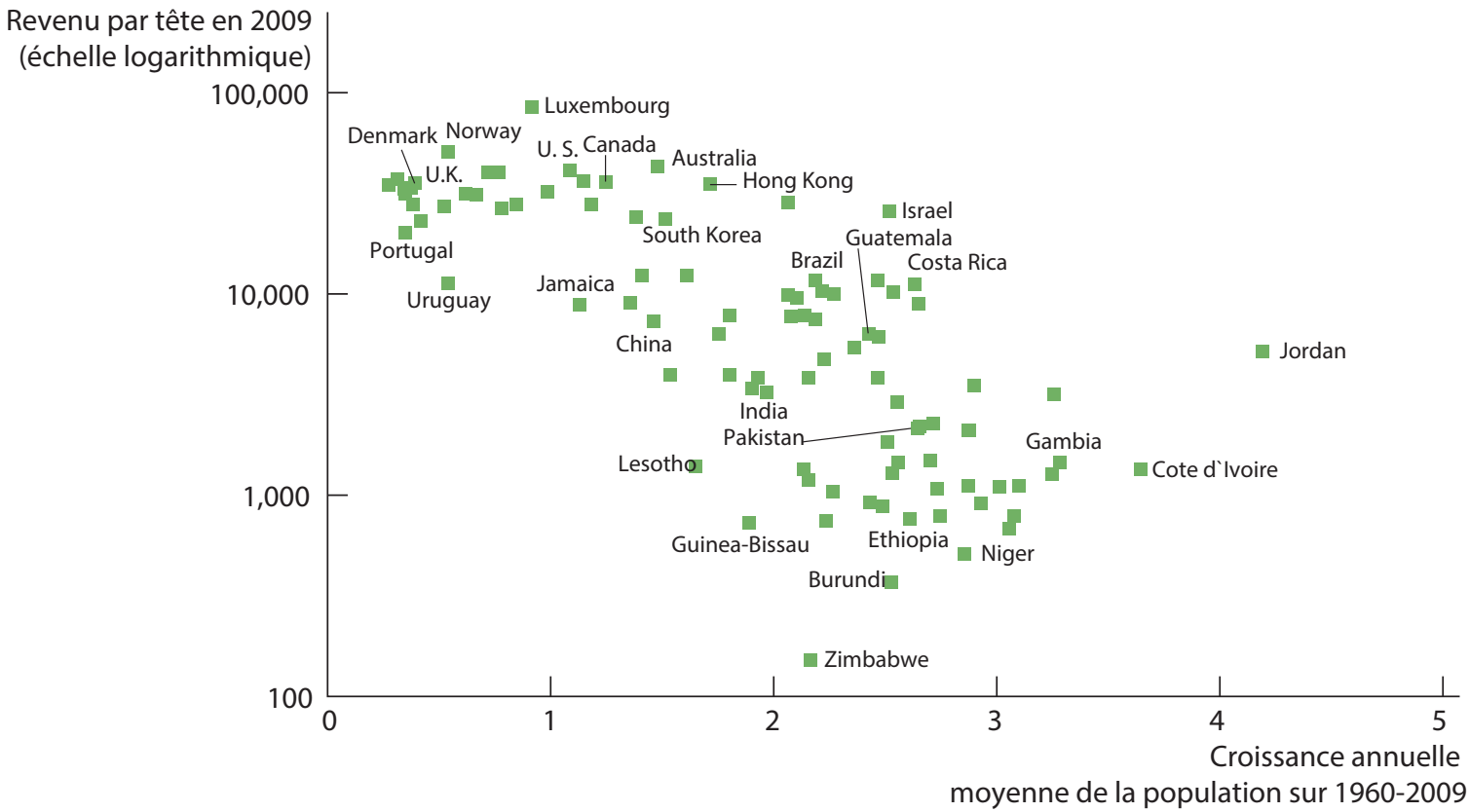


A présent, à l'état stationnaire, le capital et la production par travailleur demeurent constant malgré la croissance démographique. Ce qui implique que le **capital total et la production totale** augmente au taux n.

Impact de n sur la croissance



Validation empirique



Source: Alan Heston, Robert Summers, and Bettina Aten, Penn World Table Version 7.0, Center for International Comparisons of Production, Income, and Prices at the University of Pennsylvania, May 2011.

Cela nous apprend que les niveaux de PIB par tête sont inversement proportionnels à la croissance démographique.

Impact de n sur la règle d'or

Rappel : la fonction de consommation est toujours donnée par

$$c = y - i$$

A l'état stationnaire, $i^\star = (\delta + n)k^\star$ et on a donc

$$c^\star = y^\star - i^\star = f(k^\star) - (\delta + n)k^\star$$

Le volume de capital dicté par la règle d'or est celui qui maximise $c^\star$:

$$\frac{\partial c^\star}{\partial k^\star} = 0 \Rightarrow PmK - (\delta + n) = 0$$

$$\Rightarrow PmK - \delta = n$$

A la règle d'or, la productivité marginale net du taux de dépréciation du capital par tête est égale au taux de croissance démographique

Le progrès technique

Remarque

Le progrès technique est tout ce qui permet de produire plus avec les mêmes quantités de facteurs de production.

Exemples : *amélioration des technologies, apparition de nouvelles sources d'énergie, création de nouvelles matières, de nouveaux produits, de nouveaux modes d'organisation du travail, de nouveaux modes de transport...*

Pour le modéliser, on va supposer qu'il améliore l'efficacité du travail.

$$Y = F(K, L \times E)$$

E *représente l'efficience du travail et peut représenter l'état des connaissance, de l'éducation où de la santé par exemple.*

A présent, la fonction de production dépend des facteurs suivant : le **capital** *et les* **travailleurs efficients**

Croissance du progrès technique

Posons à présent l'hypothèse que si le progrès technique croît au taux $g_A = g$, l'efficience des travailleurs va croître au même taux g.

L'interaction entre L et E implique que le nombre de travailleurs efficients $L \times E$ croît au taux $n + g$

Cela nous amène à reconsidérer l'équation d'accumulation du capital qui devient :

$$k_{t+1} - k_t = sf(k_t) - (\delta + n + g)k_t$$

avec

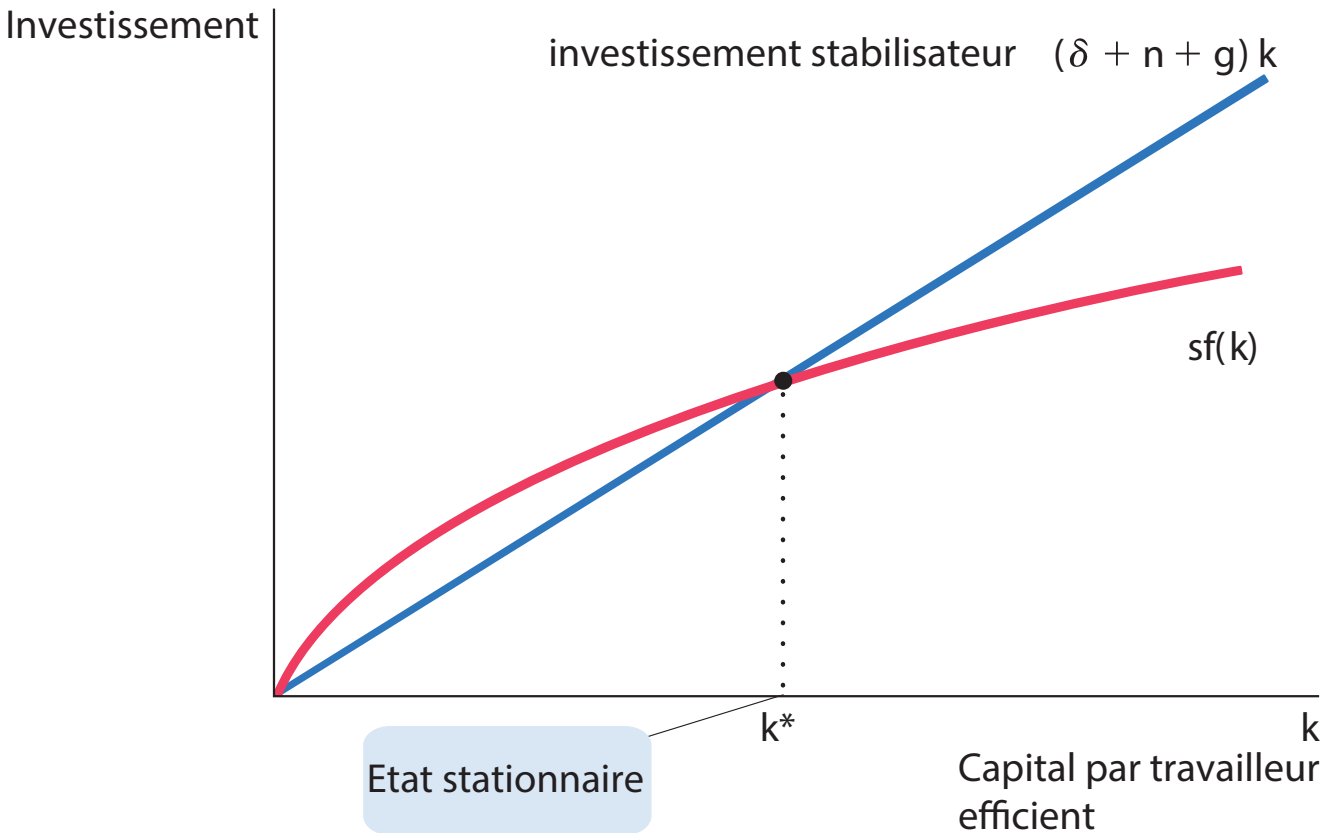
$$k_t = \frac{K}{L \times E}$$

A l'état stationnaire, l'investissement doit à présent

- compenser la dépréciation du capital δk
- fournir du capital au nouveau travailleurs à hauteur de nk
- doter en capital les nouveau travailleurs efficients à hauteur de gk

État stationnaire

On dira alors que $(\delta + n + g)k_t$ représente l'investissement nécessaire à stabiliser le capital : **investissement stabilisateur**



Impact de g sur la croissance

On sait qu'à l'état stationnaire k et constant et donc $y = f(k)$ l'est aussi.

En revanche, comme $y = \frac{Y}{L \times E}$ on a

$$\frac{Y}{L} = y \times E$$

et

$$Y = y \times E \times L$$

Cela nous permet de formuler deux conclusions importantes :

- E croît au taux g, Y/L **augment également au taux** g
- E croît au taux g et L croît au taux n, Y **augment également au taux** $n + g$

Conclusion du modèle de Solow

On dira alors que $(\delta + n + g)k_t$ représente l'investissement nécessaire à stabiliser le capital : **investissement stabilisateur**

Taux de croissance à l'état stationnaire dans le modèle de Solow avec progrès technique

Variable	Notation	Taux de croissance à l'ES
Capital par travailleur efficient	$k = K/(E \times L)$	0
Production par travailleur efficient	$y = Y/(E \times L) = f(k)$	0
Production par travailleur	$Y/L = y \times E$	g
Production totale	$Y = y \times (E \times L)$	n + g

Impact de g sur la règle d'or

Rappel : la fonction de consommation est toujours donnée par

$$c = y - i$$

A l'état stationnaire, $i^\star = (\delta + n + g)k^\star$ et on a donc

$$c^\star = y^\star - i^\star = f(k^\star) - (\delta + n + g)k^\star$$

Le volume de capital dicté par la règle d'or est celui qui maximise $c^\star$:

$$\frac{\partial c^\star}{\partial k^\star} = 0 \Rightarrow PmK - (\delta + n + g) = 0$$

$$\Rightarrow PmK - \delta = n + g$$

A la règle d'or, la productivité marginale net du taux de dépréciation du capital par tête est égale au taux de croissance démographique plus le taux de croissance du progrès technique

La sur- et sous-accumulation du capital

Rappelons nous que l'état stationnaire dicté par la règle d'or n'est atteignable par une économie que si son taux d'épargne est s_{or}

L'économie ne sera à la règle d'or que si s est tel que $\Rightarrow PmK - \delta = n + g$.

En revanche,

- si $PmK - \delta > n + g$, c'est que $k^{star} < k_{or}^{star}$: **l'économie est en sous-accumulation du capital**
  - Politique préconisée : inciter les ménages à épargner davantage
- si $PmK - \delta < n + g$, c'est que $k^{star} > k_{or}^{star}$: **l'économie est en sur-accumulation du capital**
  - Politique préconisée : inciter les ménages à consommer davantage

A la recherche de s_{or}

Afin de maximiser la consommation, un décideur public doit donc déterminer s_{or}

Exercice :

Sachant que

- $Y = F(K, L \times E)$ et que les rendements d'échelle sont constants,
- le taux de croissance du progrès technique est donné par g,
- le taux de croissance démographique est donné par n,
- le taux de dépréciation du capital est donné par δ,

déterminer le taux d'épargne qui permet de satisfaire la règle d'or.

A la recherche de s_{or}

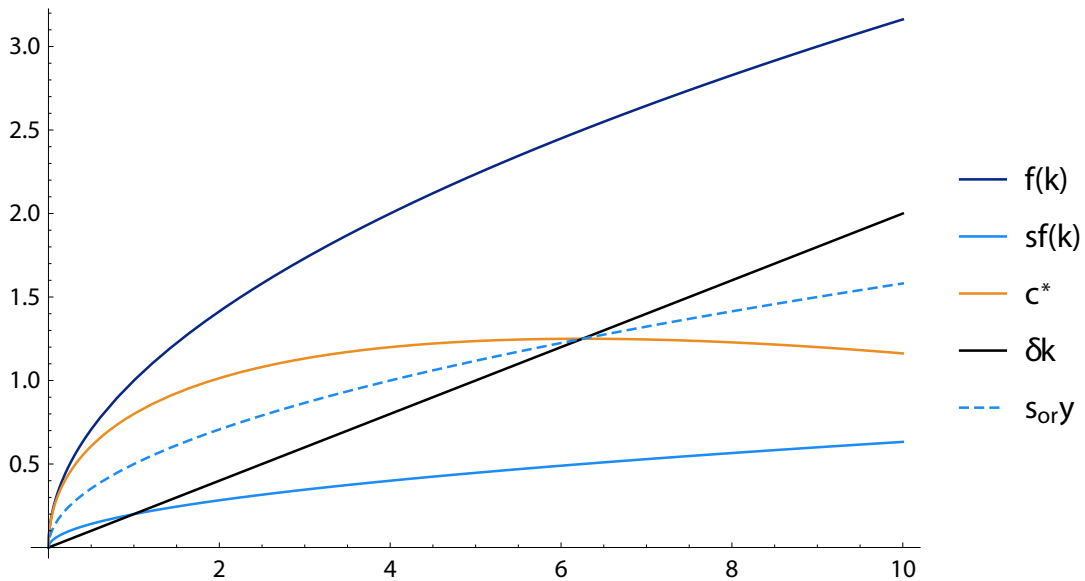
Ce que nous savons :

$$k^{\star}_{or} = \left(\frac{s_{or}}{\delta + n + g} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{1}$$

$$f(k^{\star}_{or}) = (k^{\star}_{or})^{\alpha} \tag{2}$$

$$f(k^{\star}_{or})' = \alpha (k^{\star}_{or})^{\alpha - 1} \tag{3}$$

$$f(k^{\star}_{or})' - \delta = n + g \tag{4}$$



Ces résultats vont nous permettre de trouver s_{or}

A la recherche de s_{or}

En effet, en remplaçant $k^{\star}_{or}$ on obtient

$$
\begin{aligned}
n+g &= \alpha\left(\left(\frac{s_{or}}{\delta+n+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha-1} - \delta \\
\Rightarrow 0 &= \alpha\left(\frac{s_{or}}{\delta+n+g}\right)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha}} - (\delta+n+g) \\
\Rightarrow 0 &= \alpha\left(\frac{s_{or}}{\delta+n+g}\right)^{-1} - (\delta+n+g) \\
\Rightarrow 0 &= \frac{\alpha(\delta+n+g)}{s_{or}} - (\delta+n+g) \\
\Rightarrow 0 &= \frac{(\delta+n+g)(\alpha-s_{or})}{s_{or}} \\
\Rightarrow 0 &= (\alpha-s_{or}) \\
\Rightarrow \alpha &= s_{or}
\end{aligned}
$$

On en déduit également

$$
k^{\star}_{or} = \left(\frac{\alpha}{\delta+n+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad y_{or} = \left(\frac{\alpha}{\delta+n+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
$$

Plan du chapitre

Introduction

Le modèle de Solow
- Solow simplifié
- Solow et la règle d'or du capital
- Solow et la croissance démographique
- Solow et le progrès technique

Croissance endogène
- Le modèle AK

Question d'ouverture : d'où vient le progrès technique ?

Dans le modèle de Solow, le progrès technique est la seule source de croissance de long terme.

Mais dans le modèle de **Solow**, le progrès technique est exogène et par corollaire, la croissance l'est aussi : **croissance exogène**

Critique de la boîte de conserve

Intuition : en faisant du progrès technique une variable endogène, on pourrait expliquer la **croissance** de manière **endogène**

Sources : La théorie de la croissance endogène trouve ces sources dans les travaux de P. Romer et R. Lucas

Le modèle AK sans facteur travail

Partons d'un fonction de production très simple :

$$Y = AK$$

Hypothèses : Absence de facteur travail et de productivité marginale décroissante du capital

Réaliste ? Oui si on considère que K représente également le savoir dont la productivité marginale peut être considérée comme croissante.

Hypothèses : K se déprécie au taux δ, le taux d'épargne est s et A est une constante.

La dynamique du modèle AK

L'équation d'accumulation du capital est donc donnée par

$$K_{t+1} - K_t = sY_t - \delta K_t$$

Le taux de croissance d'accumulation de k est alors donnée par

$$\frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} = s\frac{Y_t}{K_t} - \delta$$

où encore

$$\frac{\Delta K_t}{K_t} = sA - \delta$$

On constate alors que l'économie est à l'état stationnaire quand

$$sA = \delta$$

car $\frac{\Delta K_t}{K_t} = 0$.

La dynamique du modèle AK

Par la règle des variations en pourcentage on obtient que

$$\frac{\Delta Y_t}{Y_t} \approx \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta K_t}{K_t} = 0 + sA - \delta$$

Remarque

Nous avions posé A constant et donc $\frac{\Delta A}{A} = 0$. On constate alors que pour $sA > \delta$, le revenu Y augmente indéfiniment. Il y aura donc de la croissance sans hypothèse de progrès technique exogène.

L'état stationnaire est atteint pour $sA - \delta = 0$. Ceci n'est possible que sous l'hypothèse $\frac{\Delta A}{A} = 0$. Notons l'absence de dynamique transitoire dans ce modèle.

Le modèle AK avec croissance du progrès technique est incompatible avec l'existence d'un état stationnaire car dans ce cas

$$\frac{\Delta Y_t}{Y_t} \approx \frac{\Delta A}{A} + sA - \delta$$